

## 第3章 制御理論の概念と定理

B. Martos

本章の目的は、技術的数学的な制御理論に精通していないであろう読者に対して、この学問分野の基本的な考え方や方法を紹介することである。経済学に応用された他の数学分野には詳しい経済学者にとっても、このような紹介は有用であることがわかるだろうと思う。しかし、ここでの紹介は我々ないしその他の例によって刺激を受けて、制御理論の経済学的応用から新しい結論をひきだそうと努力する人のためのより深い制御理論研究にとって代ることはできない。

### 3.1. システムの制御と制御の分類

#### 1. 制御システム

制御理論の最も一般的な問題は次の如くである。すなわち、時間を通じて発展するある対象に、一定の要請を確実に満足させるようにしたい場合に、その対象にどのように介入すべきか、というのがそれである。

我々が目標とされたある方向に誘導しようと望むプロセスは、制御プロセスと呼ばれる。(我々のケースでは、それらは経済プロセスであり、自然科学や応用技術では、それらは、物理的、化学的、生物学的等々のプロセスである)。そして、介入は制御装置と呼ばれるものによって代行される。一般に、制御プロセスの規則は、所与であり、任意に変えられることはできないが、制御装置 (controller) を我々の目的に適合させ、制御プロセスの作動の型に影響を与えるのは自由であると想定されている。たとえば、自動車の構造とその作動の規則はドライバーにとって所与であるが、ドライバーは制御装置(アクセル、ブレーキ、ハンドル)の助けをかりて自分自身の意思を伝達することができるので、自動車を運転し、制御することができる。

2章では、制御プロセスは、生産、購買、個人消費や原材料消費の影響によって変化する在庫から構成された。したがって、そのプロセスは、生産量と購買量に何らかの形で影響を与えるという介入で構成された。<sup>\*</sup> 被制御サブシステムと制御装置は、両者合わせて制御システムと言われる。要請を制御装置に伝達する信号は、目標信号 (command signals) と呼ばれ、固定された目標(時間から独立)であったり、変化する目標(時間に従属)であっ

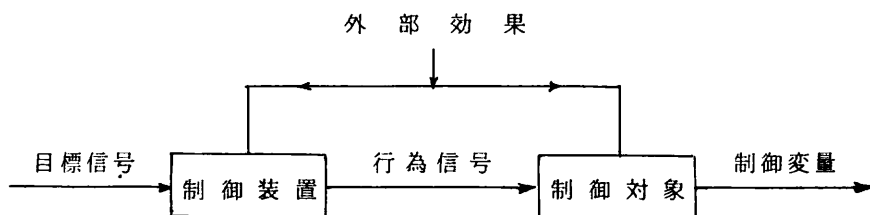
たりする。一方、制御装置によって作られ、制御プロセスの進行に影響を与える信号は、行為信号 (action signals) と呼ばれる、制御プロセスの最後には、制御変量 (controlled variable) が現われる。たとえば、KM-1 や KM-2 モデルでは、標準在庫量が目標信号であったし、生産や購買が行為信号で、在庫が制御変量であったわけである。自動車を運転する場合には、アクセルの位置が目標信号であり、エンジンの回転数が行為信号であり、速度が制御変量である。

以上で論じた要因の他に、プロセスは、通常、その環境からも我々が制御できないような形で影響を受けている。このような影響は外部効果 (external effects) と呼ばれる。外部効果は、制御プロセスと制御装置のどちらか一方、又は両方を変化させる場合がある。

(制御理論では外部効果という代りに通常「外乱 (disturbance)」や「負荷 (load)」という表現が用いられる。) 外部効果は直接観測可能な場合もあれば、観測不可能で、その存在は制御変量の変化から間接的にのみ推量することができる場合もある。たとえば、そのような外部効果とは、自動車のドライバーにとっては道路の傾斜である。ドライバーは、傾きを直接見ることによって知ることができる場合もあれば、自動車の減速や加速から間接的に傾きを推量できるだけである場合もある。KMモデルでは、最終消費がこの意味での外部効果であり、それはまた観測可能であると仮定されていた。

以上のことに基づいて、最も単純な制御システムの図式が、第3-1図に示されている。今後叙述の進展とともにこの図式は、より詳細に豊かにされていくであろう。

第3-1図 開ループ制御

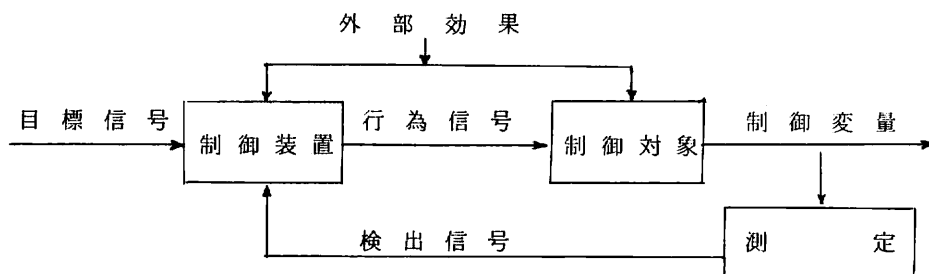


※ もし (自動機械ではなく) 人間活動に関心をもつならば、介入は決定に先行される。しかし、もし現実の介入がそうなるように意図されたものと全く同じであるならば——我々のモデルではこの仮定はしばしば用いられる——、両者は概念的にのみ異なるだけであり、量的には一致するのである。(編者)

## 2. フィード・バック制御

後との区別のために開ループ制御（open loop control）と呼ばれる第3-1図に描かれた図式では、制御変量の値は行為信号（そして何らかの外部効果）に依存しており、その逆ではない。行為はシステムの外部から与えられる目標信号と外部効果によってのみ影響される。このような開ループ制御は実際には非常に稀である。しかしこの図式は現実のひとつの近似として用いられる。この図式は被制御対象の諸特性に対する制御の作用について無知であるかまたは、関心がないような場合は、たいへん便利である。

第3-2図 閉ループ（フィードバック）制御



大多数の制御対象では、制御変量について、少なくともそれらのいくつかについての情報が集められ（測定 measurement）、その得られた情報（検出信号 detecting signal）は、制御対象の進行がこれらの信号にも依存するように制御装置へ再導入される。これをフィードバックと呼び、フィードバックのある制御システムを制御回路（control circuit）と呼ぶ。その最も簡単な図式が、第3-2図で示されている。

フィードバック制御の古典的な例が、サーモスタットである。制御対象は、サーモスタットの温度で、制御装置はこの温度を計り、目標信号は指定された一定の温度である。調温器がサーモスタットに流れ込む熱量を変化させて、締めしろは熱量を伝導するところに存在している。ここでの外部効果或いは負荷は環境からサーモスタットに流れ込む熱量であって、それは直接には観測が不可能である。

## 3. 制御の分類

開ループ制御と閉ループ制御はすでに区別した。次に、閉ループ制御を次のような観点か

らさらに分類しよう。

- a) 連続的操作システムと間欠的 (intermittently) 操作システム
- b) 単一ループシステムと多重ループシステム
- c) 定パラメータシステムと変パラメータシステム
- d) 線型システムと非線型システム
- e) 確定的信号で作動するシステムと確率的信号で作動するシステム
- f) 一変数システムと多変数システム
- g) 外生的目標システムと高次システム

#### 4. 連続的操作システムと間欠的操作システム

連続的操作システムにおいては、制御装置は任意の時刻で行為信号を変化させることができるが、他方、間欠的操作システムでは、この変化は選ばれた時点だけに限定される。このような2つの離散的な時点の間では、行為信号は一定のままである。連続的操作システムの記述においては、時間 ( $t$ ) は任意の実数値をとりうる連続な変数である。しかし、システムはある初期時点 (たとえば時間ゼロ) から操作されるので、通常、非負の  $t$  の値だけが検討される。

間欠的操作システムの中から、特殊なケースだけを論じてみよう。そのケースでは、離散的な時点が等しい時間間隔に区分され、その区間が単位時間とされる。それゆえ、このような場合、時間は整数 (通常は非負の整数) 値だけをとる。 ( $t = 0, 1, 2, \dots$ )。単純化のために、以下「連続的操作システム」対「間欠的操作システム」と言おうと、連続時間システム対離散時間システムと言おうと、双方の言い方はどちらも同じことを意味していると理解されるべきである。通常前者の操作を記述するには、微分方程式による表現が、そして後者の操作には差分方程式による表現が便利である。

『非価格制御』においては、連続的操作システムは、2・7・9章で論じられ、間欠的操作システムは、10・11・12章で論じられ、3・5・6・8章では、両方の種類が見い出されるであろう。

#### 5. 単一ループシステムと多重ループシステム

単一ループシステムは、ある1点で過程が切断されるならば開ループシステムになるという性質によって特徴づけられる。多重ループシステムはこの性質を有していない。

したがって、単一ループシステムの場合、被制御サブシステムと制御装置の2つに分けられる制御回路について論じることができる。この区分は、多重ループ制御には適用することができない。なぜならば、多重ループ制御は、いくつかの関連しあう制御ループから成っており、あるループで制御装置の役割をはたす要素が、他のループでは被制御要素として現われることがあるからである。

ここでは、主に、単一ループシステムに関心を寄せるが、『非価格制御』の12章では注文信号を伴う多重ループ制御が論じられている。

ここで用語上の問題について一言付け加えておこう。すなわち、経済の実物域 (R) と制御域 (C) の間、或いは実物プロセスと制御プロセスとの間が区別されていることがそれである。ここでは、抽象的に制御システムを論じる時は、被制御プロセスと制御プロセスが区別されている。では経済システムに関する Kornai の概念化 [Kornai (1971)] から引き継がれている先の考え方と一般的な制御理論の概念との間の関連はどんなものであろうか。最も単純な経済モデルでは、本書大部分のモデルもそうであるが、被制御プロセスは経済の実物域の集合の一部分であり、制御プロセスは経済の制御域に含まれる。しかし、現実の経済やより複雑な経済の多重ループモデルにおいては、経済の被制御プロセスとして現われる制御域のプロセスもいくつかある。(たとえば、価格制御、信用規則、貨幣流通の制御など)。また、たとえば貨幣の発行による貨幣供給の制御のように、制御域 (C) の中で被制御サブシステムと制御サブシステムの両方が機能する制御モデルも明らかに存在する。しかし、『非価格制御』ではこのようなモデルはなく、被制御サブシステムは常に実物域を含み、かつほとんどの場合、それのみを含んでいる。

## 6. 定パラメータシステムと変パラメータシステム

パラメータが時間から独立しているならば(被制御、制御両方のプロセスにおいて)、システムは定パラメータを有するという。そして、パラメータが時間に依存して外生的に決定されるならば、システムは変パラメータを有するという。『非価格制御』では、どちらのシステムも扱われる。6章から12章までは、定パラメータを伴うシステムを論じる。2章5章、10章では被制御サブシステムにおいて変パラメータも認められるが、一方、制御サブシステムでは定パラメータである。13章では、制御、被制御サブシステムの両者が変パラメータを有している。

## 7. 線型システムと非線型システム

制御、被制御プロセスの両者を数学的に記述するときに線型方程式（代数方程式、微分方程式、差分方程式）だけが現われるならば、システムは線型であると呼ばれる。このほとんど同義反復の非常に不正確な定義は、線型演算子の概念をここで導入するのを避けるために、このような形になってしまったものである。次のような重要な事にまず注意すべきである。不等式の導入は（たとえ線型不等式であれ）線型システムを非線型にするかもしれないということである。『非価格制御』における主要な関心は線型システムにあるが、非線型性は13章でシステムに導入されるだけであろう。

## 8. 確定的信号と確率的信号

制御あるいは被制御サブシステムの出力信号が同じサブシステムの入力信号だけに一意的に（確定的に）依存するならば、この出力信号は確定的と呼ばれる。サブシステムからの出力信号が同一の入力信号に対して確率的に変化するならば、確率的な出力システムであるという。制御、被制御サブシステムの両方の出力信号が確定的ならば、システムそのものが確定的であると呼ばれる。外部より制御回路全体に影響を及ぼす入力信号（すなわち、目標信号と外部効果）について少しもふれていないところがこの定義の特徴である。入力信号の性質は、システムがどの程度確定的であるか確率的であるかについて何も語らないからである。たとえば、サーモスタットは、一定の温度に対して一定の熱量を供給するならば、確定的に作用しているといえる。サーモスタットの熱の損失がまわりの環境の状態にも依存しており、かつその環境がランダムに変化するという事情は、システムが確定的であることには何らの影響も与えない。また、目標温度を設定する人が、温度を選択する際にランダムに変化させるかもしれないという可能性も重大な影響は与えないのである。『非価格制御』におけるシステムはすべて確定的であるが、11章は別で、そこでは行為信号が確率的になっている。

## 9. 一変数システムと多変数システム

制御、被制御サブシステム両方の入力および出力信号が、それぞれ1つの実数値変数によって特徴づけられるならば、システムは一変数であると呼ばれる。このようなことは、工学上の応用においてさえ非常に稀にしか現われぬ。したがって、我々の経済学的な分析において、多変数システムだけが論じられているからといって、特に弁明は必要でない。

## 10. 外生的目標システムと高次システム

ここで検討されるモデルでは、目標信号は時間を通じて一定であるかまたは変化するかのみであり、それらは外生的に与えられる。『非価格制御』4章では、このような2種類の制御が論じられる。それは、標準指標（norm）による制御と標準径路（nomal bath）による制御である。

ソシオエコノミックな全体的プロセスから切り離された特殊な部分的プロセスでさえ、このような方法では不完全にしか記述することはできない。現実のシステム制御においては、目標信号がシステム自身で作られて、目的修正や自己目標というような機能もまた存在する。たとえば、経験に照らして制御パラメータを変化させる学習や、或いは制御装置の構造や制御、被制御組織の要素やそれらの間の相互関連などが変化するというまさに自己組織化として4章で若干論じられるような標準指標形成過程が存在している。そのような高次のソシオエコノミックな機能について定式化された記述について、あえて全く考えなかったということは——もちろん、それが重要であることも完全に承知しているが——ここでの研究の初歩的な性格を示している。

ここでなされている制御理論の用語上の一対の区別について言及しておくほうがよいだろう。そこでは、一方の所与の目標信号により作動するシステムは、他方の自己制御、学習、自己組織化によるシステムと対比される。1章で言及された社会科学の用語上の二組の区別は、この区別と密接に関連している。すなわち、歴史的限定動学と永年の動学との間の対比（1・18）や標準指標による制御プロセスと標準指標形成プロセスとの間の対比（1・11）が存在しているのである。

### 3.2. 時間領域における伝達要素

## 11. 方 法

制御システムを正式に記述するために利用できる方法は多い。それらには、グラフによる技法が含まれ、最もよく知られているものとしてはブロック線図と信号線図とがある。[訳者補論1参照] そのうち前者が、図示するために（標準的な記号を厳密に主張することなく）ときどき用いられるであろう。しかし、多くの変数を伴う複雑なシステムの場合、図による叙述は、平明さという利点を失ってしまう。利用することができる数学的叙述のうち、行

行列数が当を得た道具であるように思われる。『非価格制御』でも、広範囲に渡ってそれに頼るので、読者が行列の取扱いに慣れていと想定されている。また、すでに述べたように、連続時間システムの記述には微分方程式の使用が、そして、離散時間システムには差分方程式の使用が当然であるように思われる。加えて、理論的に記述し、分類し、分析することは、システムをある種の標準的な（正準的な）形に環元することによって容易になるのである。制御理論では、3つの標準形があるが、それらは、連続時間制御と離散時間制御に区別されて、次の表に要約されている。

基準形式	連続時間	離散時間
一般時間領域形式	微分方程式	差分方程式
状態空間形式	連続的状态空間表示	離散的状态空間表示
周波数領域形式	フーリエ変換, ラプラス変換 Z 変換	

これらのうち、時間領域形式だけが本節で論じられる。3.3は、ラプラス変換を扱うが、本章では用いられないフーリエ変換とZ変換は全く扱われない。

本節ならび次節においては、定パラメータを伴う線型のシステムに限定する。時間領域において、このように限定するのは意図的である。というのは、変パラメータや非線型性を伴うシステムもここで論じられてもよかったからである。問題をこのように限定した理由は、紙数が制限されたことと単純さを得ようと努力したからであるが、他方、通常の場合必要なことはこれで充分なはずである。

本書のさまざまな箇所では、自分自身の分析のために最も適していると考える形で自らのモデルを書いているので、非常にたくさんの関数の形（そして、それら同士の変換も）を詳しく論じることが必要となる。しかしこのことは、それらを比較するのを困難にするのである。以下での定式化によって、読者が異なった形式の背後にある類似性を認識されるよう希望する。

## 12. 伝達要素

単純化をさらにすすめるため、最初に完全な制御回路を記述することはせず、 $\dot{\cdot}$ と $\ddot{\cdot}$ と呼ばれるシステムの基本的部分だけを述べることにしよう。単純な回路は、3.5で、より複雑で分割されたシステムは本書の5章だけで論じられるであろう。したがって、さしあたり、伝達要素を複雑な制御回路と連結する問題は無視しよう。



伝達要素は、入力信号ベクトル ( $v$ )、出力信号ベクトル ( $y$ )、そして、両者のあいだの関係の三者によって特徴づけられる。すなわち、入力信号がどこからきたのか（他の要素からか、外部効果からか、目標信号からか）ということや、出力信号がどこへ行くのかということにわずらわされる必要はないのである。

### 13. 連続的伝達要素の一般的微分方程式形

定パラメータの線型要素は、次のような形に表わされる。<sup>1)</sup>

$$14. \quad A_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + A_2 \ddot{y} + A_1 \dot{y} + A_0 y = B_m \frac{d^m v}{dt^m} + \dots + B_2 \ddot{v} + B_1 \dot{v} + B_0 v,$$

ここで、  
 $v = v(t)$ :  $\mu$  個の要素を持つ入力信号ベクトル。  
 $y = y(t)$ :  $\nu$  個の要素を持つ出力信号ベクトル。  
 $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ):  $\nu \times \nu$  の定数行列  
 $B_j$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ):  $\nu \times \mu$  の定数行列

$n$  は、微分方程式の階数と呼ばれ、 $A_n$  は正則であると仮定される。

### 15. 比例—積分—微分要素 (PID要素)

次に方程式14にしばしば現われるケースを考えよう。

$$16. \quad \dot{y} = B_0 v + B_1 \dot{v} + B_2 \ddot{v}$$

この方程式を時間に関して積分すると（積分定数を無視する）

$$17. \quad y = B_0 \int v dt + B_1 v + B_2 \dot{v}$$

このように特徴づけられた伝達要素は、比例—積分—微分要素と呼ばれ、右辺の和となっているそれぞれの項は、その書かれている順に、積分動作要素（リセット）（I）、比例動作要素（P）、微分動作要素（レイト）（D）を示す。3つの項のうち2つだけが存在する

---

1) 変パラメータと非線型性を伴う伝達要素は、同じような方法で書かれる。

ならば、P I、P D或いは I D要素と呼ぶ。単なるP要素は、静学的である。\*

例をとれば、KM-2モデルの制御サブシステムを伝達要素と考えれば、それは方程式系 2・31-32の中に含まれて記述されている。次のような記号を導入すれば、

$$18. \quad y = \begin{bmatrix} r - Y 1 - z \\ Y e_1 - A e_1 r_1 \\ \vdots \\ Y e_n - A e_n r_n \\ z \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} q^* - q \\ (V^* - V) e_1 \\ \vdots \\ (V^* - V) e_n \\ w^* - w \\ c \end{bmatrix}$$

(したがって、 $y$ は  $(n^2 + 2n)$  個の要素のベクトルで、 $v$ は  $(n^2 + 3n)$  個の要素のベクトルである)。系 2・31-33を、次の形に書くことができる。

$$19. \quad \dot{y} = B_0 v + B_1 \dot{v}$$

ここで

$$B_0 = \begin{bmatrix} C^2 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & C^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2BC & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & 2BC & E \end{bmatrix}$$

すなわち、まさにP I要素（比例+積分）が存在するのである。他方、KM-1モデルでは、 $B_1 = 0$ であるので、積分動作が存在するのである。<sup>2)</sup>

\* より一般的な用法では、線型のケースのみに限らないならば、入力信号と出力信号が通常の方程式（すなわち、微分方程式や差分方程式ではなく）によって結びつけられているとき、その要素は静学的と呼ばれるのである。（編者）

2) 伝達要素の元の出力変数  $r, Y, z$  は逆変換により得ることができることに注意。

$$\begin{aligned} r &= L \{ E, E, \dots, E, E \} y \\ Y e_j &= \{ 0, 0, \dots, E, \dots, 0, 0 \} y + A e_j e_j L \{ E, \dots, E \} y, \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ z &= \{ 0, 0, \dots, 0, E \} y \end{aligned}$$

## 20. 連続的伝達要素の状態空間表示

定パラメータの線型の伝達要素の状態空間表示は、次の形をとる。

$$21. \quad \dot{x} = P x + R u.$$

ここで  $x$  は状態ベクトル、

$u$  は制御ベクトル、

$P$  はシステム行列、

$R$  は入力行列、

である。

## 22. 一般的な微分方程式形から状態空間表示への転換

14の一般的な微分方程式形は、次のような方法で21の形に変えることができる。<sup>3)</sup>

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}, \quad u = B_0 v + B_1 \dot{v} + \cdots + B_m \frac{d^m v}{dt^m},$$

と記号を定めよう。

すると方程式体系14は、次のような形に置き換えられうる。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & E \\ -A_n^{-1} A_0 & -A_n^{-1} A_1 & -A_n^{-1} A_2 & & -A_n^{-1} A_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_n^{-1} \end{bmatrix} u,$$

記号の自明な書き換えを施すと、これはすでに21の形に対応している。

3) これだけが、唯一可能な変形方法であるのではない。同じ微分方程式は異なる状態方程式の形で書かれうるのである。

### 23. 出力方程式

伝達要素の出力ベクトルを得るためには、状態方程式21は、さらに次のような形の出力方程式で補完されることを必要とする。

$$24. \quad y = S x + T u$$

14と同様に、 $y$ を伝達要素の出力ベクトルと呼ぶ。行列 $S$ が出力行列であり、行列 $T$ が補助行列 (auxiliary Matrix) である。(  $T=0$ ,  $y = S x$  とおかれることがしばしばある。すなわち、出力ベクトルは状態ベクトルにのみ依存するのである。)

たとえば、22の状態ベクトル $x$ から14の形の出力信号を再び得たいときは、

$$y = [E, 0, \dots, 0] x$$

と選べば、24の形 ( $T=0$ ) に対応するのである。

### 25. 間欠的伝達要素の一般的差分方程式形

間欠的に作動する伝達要素は、連続的に作動する伝達要素に対応するのが微分方程式形であったのと同様に、入力信号 $v$ と出力信号 $y$ とに関する一般的な差分方程式として記述される。唯一の形式上の差は、微分演算子 $\frac{d}{dt}$ とそのべきの代りに、差分演算子とそのべきが書かれているという点である。差分演算子 $\Delta$ とそのべきは、次の方程式によって定義されている。

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t),$$

$$\Delta^{k+1} x(t) = \Delta^k x(t+1) - \Delta^k x(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

たとえば

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(t) &= \Delta x(t+1) - \Delta x(t) \\ &= [x(t+2) - x(t+1)] - [x(t+1) - x(t)] \\ &= x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) \end{aligned}$$

したがって、伝達要素の一般的差分方程式形は

$$26. \quad \bar{A}_n \Delta^n y + \dots + \bar{A}_1 \Delta y + \bar{A}_0 y = \bar{B}_m \Delta^m v + \dots + \bar{B}_1 \Delta v + \bar{B}_0 v$$

となるであろう。この差分方程式形に適用される概念と特定化は、微分方程式形14に対し

て議論されたことと類似している。

しかしながら、間欠的作動システムの記述においては、差分方程式形26の代りに、(同様に一般的な)時間推移形を用いる方が有益であることが多い。

$$27. \quad A_n y(t+n) + \dots + A_1 y(t+1) + A_0 y(t) \\ = B_m v(t+m) + \dots + B_1 v(t+1) + B_0 v(t)$$

次の公式を用いることによって、方程式26と27との間の転換がなされる。

$$28. \quad A_i = \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} \binom{K}{i} \bar{A}_k, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \\ B_j = \sum_{k=j}^m (-1)^{k-j} \binom{K}{j} \bar{B}_k, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m$$

そして、

$$29. \quad \bar{A}_i = \sum_{k=i}^n \binom{K}{i} A_k \\ \bar{B}_j = \sum_{k=j}^m \binom{K}{j} B_k.$$

### 30. 間欠的作動伝達要素の状態空間表示

間欠的作動伝達要素の状態方程式を記述する場合、27の時間推移形から(すなわち、 $\Delta$ 演算子形からではなく)出発する方が都合がよい。すると、状態空間表示21の離散的なバリエーションとして、次の方程式を書くことができる。

$$31. \quad x(t+1) = Qx(t) + Ru(t)$$

そして、出力方程式24の代りに、方程式

$$32. \quad y(t) = Sx(t) + Tu(t)$$

を書くことができる。これらの方程式に現われる変数と行列の定義は、Pの代りにQの記号で表わされているという点を除けば、21と24の定義と同一である。Qが用いられている点の説明は、次の通りである。

### 33. 注 意

状態空間表示の21と31との間の類似性は完全というわけではない。31を直接差分方程式に転換すれば、

$$\Delta x = (Q - E)x + Ru$$

を得る。これは、21と比較すれば、行列(Q - E)が、当初のシステム行列Pに対応していることを示す。当然、こうした観察は、連続型システムと離散型システムとの間の解や安定性などを比較するところではどこでも、意味をもつことになろう。

### 3.3. ラ プ ラ ス 変 換

#### 34. ラプラス変換について —— 経済学的解釈

ラプラス変換が、経済学者によってしばしば用いられるような手法ではないということをもまず認識しておこう。そこで紹介のために、経済学的な用語でラプラス変換の基本事項の解釈を行おう。しかし、実際にはこの解釈は完全に正しいわけではなく、また、変換が用いられる本書の該当箇所を採用することさえできない。

$x(t)$ を時間 $t$ の領域 $t \geq 0$ で定義されたスカラー値、或いはベクトル値関数としよう。経済学的説明を容易にするために、たとえば、 $x(t)$ はある時点 $t$ において生じた費用、 $s$ を割引率としよう。すると、プロセス $x(t)$ の割引現在価値は、次の積分で与えられる。

$$\int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

明らかに、この現在価値を知っていても、それだけでは、元のプロセスを再構成するためには充分ではない。というのは、時間を通じた配分が異なるプロセスが、同じ現在価値をもたらすことも可能であるからだ。しかし、ただ1つの割引率に対する現在価値だけでなく、それについての充分に大きい集合に対する現在価値も知るならば、関数 $x(t)$ を再構成することができるであろうか。

上記の積分が存在する任意の関数に対して、肯定的な答を与えることができる。実際的に

例えば、それが存在するためには、関数  $x(t)$  が任意の指数関数よりも急速に無限大に近づかないということのみを必要とする。〔訳者補論 2 参照〕関数  $x(t)$  が連続であるならば、その積分の収束のためにはその他の条件は必要としない。次に、上記の現在価値を変数  $s$  の関数と考え、それを  $X(s)$  で表わせば、関数

$$35. \quad X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

は、関数  $x(t)$  のラプラス変換と呼ばれる。(これと同様に今後も、ある変数のラプラス変換は、同じ文字のボールド体で表わされる。たいていの場合、これにより混乱をもたらすことなく、独立変数  $t$  と  $s$  を除くことができる。) 今後、ラプラス変換の存在はどの関数についても仮定されるが、それらを個々に検討することはない。

さて、實際上妥当なすべてのケースに対して、時間に関するもとの関数とそのラプラス変換との間の一対一の対応が存在することがわかっている。したがって、一方は他方から導き出すことができるのである。ラプラス変換を作るには、上記の積分を利用することになるが、その逆変換は、実際の目的には用いることができない次の複雑な公式によって行なわれる。

$$36. \quad x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s) e^{ts} ds$$

実定数  $\sigma$  は、適切に選ばなければならない。<sup>4)</sup> 公式を用いる代りに、ラプラス変換は、関数表から簡単に導きだせ、逆変換の場合ははるかに簡単になる。ここに、そのような表のほんの一例をかかげておく。(第 3-1 表 参照)

逆変換に至っては、もはや何の経済学的解釈をつけることも不可能であることは明らかである。今までは、変数  $s$  をあたかも実数を示すかのように述べてきたが、ラプラス変換の理論では、 $s$  は複素数なのである。しかしながら、複素数値の割引率に対しては、経済学的解釈を与えることはできないのである。

ラプラス変換を表わすには、時には記号  $L[\cdot]$  を用い、逆変換には記号  $L^{-1}[\cdot]$  を用いよう。したがって、この表記法で示すと、

$$37. \quad L[x(t)] = X(s)$$

$$L^{-1}[X(s)] = x(t)$$

---

4) すなわち、 $\sigma$  が関数  $X(s)$  の極の最大の実部よりも大であるようにである。

となる。

第 3-1 表

関数番号	$x(t), t \geq 0$	$X(s)$	有効領域
1	1	$\frac{1}{s}$	$\text{Re } s > 0$
2	$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re } s > 0$
3	$t^n (n: \text{整数})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re } s > 0$
4	$e^{-\alpha t} (\alpha: \text{実数})$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\text{Re } s > -\alpha$
5	$\sin \omega t (\omega: \text{実数})$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re } s > 0$
6	$\cos \omega t (\omega: \text{実数})$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re } s > 0$

### 58. ラプラス変換の若干の諸特性

ここで、表（第3-2表 参照）に要約されているラプラス変換の若干の諸特性について述べておこう。

線型の特性 1 と 2 によると、関数の和は、時間から独立な係数は不変のままにして、各項ごとに変換することができるが、これは我々にとって特に重要である。ラプラス変換が微分方程式を  $s$  に関する通常の（代数的な）方程式に変えるということを示す微分の特性 5 と 6 もまた劣らず重要である。<sup>5)</sup> 【訳者補論 3 参照】

性質 8 の助けをかりれば、離散時間型システムも  $L$ -変換形に書き換えることができる。これは、指数要素が出現するため、通常は実用的ではないが（この理由により、このような場合は、代りに  $Z$  変換がよく使われるのである。）、理論的な議論を単純にするのである。

5) 特性 5（そして 6）の記述の際に、上ツキ添字  $0$  は、時点  $t = 0$  での値を意味する。これらの特性が保持されるためには、関数  $x$ （そして、 $t$  に関する  $n - 1$  次までの導関数）点 0 の左側で連続であることが仮定されている。これは、いわゆる切り換え現象を排除している。反対のケースでは、左側極限は（ $t \rightarrow -0$ ）を意味しなければならない。



第 3-2 表

特性番号	$x(t), t \geq 0$	$X(s)$	特性
1	$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ( $\alpha_1, \alpha_2$ 実数)	$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$	線型性
2	$Ax$ ( $A$ は定行列)	$AX$	線型性
3	$x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ ( $\alpha$ は実数)	$\alpha X(\alpha s)$	相似性
4	$e^{-\alpha t} x$ ( $\alpha$ は実数)	$X(s + \alpha)$	減衰
5	$\dot{x}$	$sX - x^0$	微分
6	$\frac{d^n x}{dt^n}$	$s^n X - s^{n-1} x^0 - \sum_{k=2}^n s^{n-k} \left(\frac{d^{k-1} x}{dt^{k-1}}\right)^0$	微分
7	$\int_0^t x \tau$	$\frac{X}{s}$	積分
8	$x(t + \alpha)$ ( $\alpha \geq 0$ )	$e^{\alpha s} X$	時間領域内移動

### 39. 伝達要素のラプラス変換

定パラメータの線型の伝達要素のラプラス変換は、次のように書かれる。

$$40. \quad \mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{v},$$

ここで、 $\mathbf{v}$  は入力ベクトルの、そして  $\mathbf{y}$  は出力ベクトルのラプラス変換であり、行列  $\mathbf{F}$  は、いまや定行列ではなく、それ自身が  $s$  の関数であり、伝達行列 (transfer matrix) と呼ばれる。この形は、連続的および間欠的に作動する伝達要素の両方を記述するには適している。

### 41. 状態空間表示から $L$ -変換への転換

まず、方程式 21 と 24 で記述されている連続的な状態空間表示について考えよう。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{R}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{T}u.$$

第3-2表の性質2と5を適用すれば、この2本の方程式のラプラス変換は、次のようになるであろう。

$$42. \quad s\mathbf{X} - \mathbf{x}^0 = \mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{R}\mathbf{u}$$

$$43. \quad \mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{T}\mathbf{u},$$

42より、

$$\mathbf{X} = (\mathbf{sE} - \mathbf{P})^{-1} (\mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{x}^0),$$

を得る。これを43に代入して、

$$\mathbf{y} = [\mathbf{S}(\mathbf{sE} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{R} + \mathbf{T}]\mathbf{u} + \mathbf{S}(\mathbf{sE} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{x}^0,$$

ここで次の記号を導入すれば、

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{x}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{sE} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{R} + \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}(\mathbf{sE} - \mathbf{P})^{-1} \end{bmatrix}$$

40の形の伝達要素の方程式を直接得るのである。

この変換から明らかなように、ラプラス変換を適用する時に、入力信号のベクトルの中に、状態変数の初期値  $\mathbf{x}^0$  を含むということは理に適ったものである。(これはまさに理論的である。伝達要素の初期状態は、過去から、すなわち外部からもたらされるものであるからだ。)

一般的微分方程式形(14)で与えられる伝達要素は、まず状態方程式形(22参照)に置かれ、そして次に上記の変換を施されることによって、ラプラス変換の形にすることができる。しかし、ラプラス変換は、一般的な微分方程式形からも直接に求められるのである。ここでは、そのための複雑な公式を与えることはしないが、変換の結果として、入力・出力双方のベクトルと、その導関数の初期値が含まれ(第3.2表、特性6を参照)、そしてこれら初期値もまた、ラプラス変換の入力ベクトルの定義の中に含まれねばならない、ということだけを注意しておこう。

今度は、方程式31-32で記述された離散時間型の状態空間表示について考えよう。

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{R}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}\mathbf{u}(t)$$

第 3-2 表の性質 2 と 8 を適用することにより、

$$e^s \mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{R} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{T} \mathbf{u}.$$

を得る。最初の方程式より

$$\mathbf{x} = (e^s \mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R} \mathbf{u},$$

これを第 2 式に代入して、

$$\mathbf{y} = [\mathbf{S} (e^s \mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R} + \mathbf{T}] \mathbf{u},$$

を得るが、これはすでに 40 のように希望された形である。

### 3. 4. 単純な制御ループの標準形

#### 44. 単純な制御ループ

伝達要素を表示する代替的な方法についてはすでに知識を得たので、次に、単純な制御ループのいくつかの標準形について議論を進めることができる。出発点として、第 3-2 図で示された単純な制御ループの図式をとり、次の標準的な記号を導入しよう。

$x$  : 制御変量ベクトル

$y$  : 検出ベクトル

$y^*$  : 目標信号ベクトル

$u$  : 行為信号ベクトル

$z$  : 外部効果 (外乱) ベクトル

さらに、次のことが仮定される。

45. 制御変量から検出信号を生み出す測定プロセスは、比例 (P) 要素であり、外乱の影響はうけない。(すなわち、測定における誤差は考慮に入れないのである)。

46. 制御サブシステムの入力信号は、制御動作信号 (actuating signal), 或いは、偏差ベクトルであり、これは、目標信号と検出信号との差のベクトル、 $y^* - y$  に他ならない。

#### 47. 連続時間型制御ループの標準的状態空間表示

被制御サブシステムの方程式は、

$$48. \quad \dot{x} = Gx + Hu + Iz.$$

であり、

測定方程式は、

$$49. \quad y = Mx.$$

であり、

制御装置の方程式は、

$$50. \quad \dot{u} = Ju + K(y^* - y) + Nz.$$

である。

48は、入力ベクトル  $u$ 、 $z$  と状態ベクトル  $x$  による被制御プロセスの状態空間表示であり、49は、出力ベクトルが状態ベクトルにのみ依存するケースに対する制御プロセスの出力方程式である。50は、状態ベクトル  $u$  と入力ベクトル  $(y^* - y)$ 、 $z$  による制御プロセスの状態空間表示である。ここで  $u$  は、同時に出力ベクトルであり、それゆえ制御装置は別に出力方程式は持っていないのである。

これはしばしば生じることなのだが、被制御サブシステムが実物プロセスだけで構成されているならば、方程式48は、連続時間型の実物域 (R) の、そして49と50は制御域 (C) の標準的な状態空間表示を与える。後に論じる離散時間のケースにおける標準的な状態空間表示と標準的なラプラス変換についても、同様のことが成り立つ。

制御ループの標準的な状態空間表示はまた、ループがもはや2つの要素の総合としてではなく、単一の要素として考えられるような方法で書き換えられる。そうすると、その状態ベクトルは、 $[x', u']'$  に、入力ベクトルは、 $[z', y*']'$  に、出力ベクトルは  $x$  になるのである。この場合、50において  $y$  のところに  $Mx$  を代入するだけでよい。

$$51. \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & H \\ -KM & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & O \\ N & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y^* \end{bmatrix}$$

$$x = [E \quad O] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}.$$

制御ループのシステム行列  $\begin{bmatrix} G & H \\ -KM & J \end{bmatrix}$  が、制御、被制御サブシステムのシステム行列GとJだけでなく、また出力（測定）行列Mだけでなく、入力行列HとKにも依存しているということは注目に値する。

## 52. 離散時間型制御ループの標準的状態空間表示

標準的な状態空間表示の離散的なバリエーションは、連続的なものとの類推で簡単に書くことができる。48と50の左辺の微分演算子の代わりに差分演算子を書き、若干の簡単な計算をして、 $(G + E)$  と  $(J + E)$  を  $\bar{G}$ 、 $\bar{J}$  で置き換えると、

$$53. \quad x(t+1) = \bar{G}x(t) + Hu(t) + Iz(t)$$

$$y(t) = Mx(t)$$

$$u(t+1) = \bar{J}u(t) + K[y^*(t) - y(t)] + Nz(t).$$

が得られる。この標準形も51と同じような形に書き換えることができる。

$$54. \quad \begin{bmatrix} x(t+1) \\ u(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G} & H \\ -KM & \bar{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & O \\ N & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ y^*(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = [E \quad O] \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}.$$

## 55. 制御ループの標準的なラプラス変換表示（『非価格制御』第8章の第8.1図も参照 〔訳者補論4 参照〕）

被制御サブシステムの方程式は、

$$56. \quad \mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{I}\mathbf{z}.$$

であり、

測定方程式は、

$$57. \quad \mathbf{y} = \mathbf{M} \mathbf{x},$$

であり、

制御装置の方程式は、

$$58. \quad \mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{y}^* - \mathbf{y}) + \mathbf{N}z,$$

である。

ここに現われている行列  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{N}$  は通常、 $s$  の関数であることは注意されるべきである。そして、標準的な状態空間表示 (48-50) から特に、方程式 56-58 をひきだすとすれば、これらの行列と行列  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{N}$  との関係は次のようになる。

$$59. \quad \begin{aligned} \mathbf{H} &= (s\mathbf{E} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} & \mathbf{I} &= (s\mathbf{E} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{I} \\ \mathbf{K} &= (s\mathbf{E} - \mathbf{J})^{-1} \mathbf{K} & \mathbf{N} &= (s\mathbf{E} - \mathbf{J})^{-1} \mathbf{N}, \end{aligned}$$

ここで、初期値  $\mathbf{x}^0$ 、 $\mathbf{u}^0$  に対応する項はまだ考慮には入れてない。

56-58 から制御ループの他の標準形 (51 に対応する) へは、次のようにして移すことができる。57 の  $\mathbf{Y}$  を 58 に代入し、そしてその  $\mathbf{u}$  を 56 に代入すれば、

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{y}^* - \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{x} + (\mathbf{H}\mathbf{N} + \mathbf{I})z.$$

を得る。右辺の第 2 項を左辺に移行して、その存在が仮定されている  $(\mathbf{E} + \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{M})$  の逆行列を掛ければ、

$$60. \quad \mathbf{x} = (\mathbf{E} + \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{M})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{y}^* + (\mathbf{E} + \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{M})^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{N} + \mathbf{I})z.$$

となる。

制御ループのこの第 2 の標準形において、行列

$$61. \quad \mathbf{Y}^* = (\mathbf{E} + \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{M})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{K} \quad [= \mathbf{H}\mathbf{K}(\mathbf{E} + \mathbf{M}\mathbf{H}\mathbf{K})^{-1}]$$

は、目標伝達行列と呼ばれ、行列

$$62. \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{E} + \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{M})^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{N} + \mathbf{I})$$

は、外乱伝達行列と呼ばれる。この記号を用いれば、61 を次のような単純な形に書くことが

できる。

63. 
$$\mathbf{x} = \mathbf{Y}^* \mathbf{y}^* + \mathbf{Z} \mathbf{z} .$$

### 3. 5. 制御の評価規準——安定性

#### 64. 制御の評価規準

制御の良さやその応用可能性は、様々な観点から、また様々な規準から判断されること、そして、個々のケースにおいてどんな規準を用いるのが適切かということを決めるのは制御目的だということを主張するのは月並みなように思える。

制御理論の工学的応用において、制御システムの安定性は基本的な規準である。それは、外乱の生じた後に、システムがある特定化された状態（径路）の近傍に到達し、結局そこにとどまり続けるかどうかということを示す。このような問題設定は経済システムの研究にとって満足のいくものではないと、本書の多くの執筆者は考えた。それゆえに、コルナイとマルトシュは、2章ですでに存続可能性という考え方を導入し、それに続く諸章でも、この概念は重要な役割をひき続き果たしている。6章では、ブローディが適切な誘導制御（correctly orientating control）という概念を導入した。概念をこのように拡張した動機は、経済の制御を検討する場合には、初期時間の直後に生じるプロセス（過渡プロセス）が、最終的に接近する（しかし、現実的には決して到達しないような）状態よりも重要とはいえないが、それと同等に重要であるという共通した考えによってひき出されたものである。

上記のような考え方は、筆者らの研究に2つの大きな重荷を背負わせることになった。一つは、内容に、もう一つは方法論に関してである。

内容に関することを言えば、不安定なシステムは、遅かれ早かれ経済的な意味でも許容できなくなるのである。所与の抽象水準では、我々はどのくらいの期間に渡りシステムを許容しうる範囲内で行動させるかについての知識をもっていないので、結果的に安定性の分析を欠くことができないのである。もう一つの技術的な困難とは、安定性に関する概念と分析方法が適切に作用し、広く利用されるかぎりでは、作動可能性などのシステムに追加される要請を検討するために必要な概念的道具をもって実験を始めることができるという矛盾から引き出される。これらを数学的に分析するためには、せいぜいアドホックな方法だけが利用されるのである。

私の個人的な意見では、これが、なぜ、今まで本書で論じられている過度に抽象化された

モデルの世界から脱け出せなかったのかという主な理由なのである。

これはまた、制御理論の概念と数学的基礎について述べる本章において、なぜ安定性規準に関する詳細な議論に限定するのか——これは、不適切で残念であるが——ということも説明する。我々はその他の規準に関する一般的な取り扱い方を与えることができないのである。

## 65. 安定性の概念

制御理論、特に現代的制御理論においては、多くのシステム安定性についての考え方が知られており、使用されている。加えて、不幸なことには、もし単純な用語法を求めるならば、いくつかの難点が生じる。というのは、古典的（線型）理論で使用される用語法は、リアプノーフにはじまる現代的（非線型）理論で頻繁に使用される考え方と一致しないからである。それゆえ、経済学者が安定性の概念を必ずしも同じ意味で使用しないとしても驚くに値しない。比較するため、2種類の概念を次の表に要約しよう。

古典的（線型）	現代的（リアプノーフ）	
不安定	不安定	
境界線上	漸近的安定でない安定	} 安定
安定	漸近的安定	

本書では、その大部分において線型システムのみが論じられるという事実にもかかわらず、リアプノーフの用語法が使用される。

最後に、読者に注意しなければならないことがある。制御理論（或いは、はるかにさかのぼって力学）に源をもつ安定性の考え方は、常識的な語法やまたは、経済生活における安定性によって意味されることと一致していないのである。特に、ここで使用される安定性の考え方は、長期間に渡る場合でさえかなりの振動を認めるし、（システムが漸近的安定でない安定の場合。）、ことのほか初期におけるプロセスの過渡段階ではそうである。（漸近的安定の場合）また、システムが強い外乱に反応し、その後ゆっくり減衰していく場合も排除されない。しかしながら、経済学者はそれと反対に、経済システムの振動が比較的小さな振幅で、大きな揺れを伴うことなく外乱に耐えることができる場合にのみ安定と考える。この必要条件は——とはいうものの、この条件は物理学や制御理論で通常やれているほど正確に定式化されているわけではないが——、制御理論の安定性概念よりもおそらく厳しいものである。



以下で、状態空間表示から出発して（元来はより一般的形式で記述される）、リャプノフの安定性概念を導入しよう。

## 66. 基本解

21と31における状態空間表示について考えよう。

$$67. \quad \dot{x} = Px + Ru \quad x(t+1) = Qx(t) + Ru(t)$$

51と54で見たように、標準形で書かれた制御ループもこの形にすることができる。（この点からは興味のない出力方程式を今は無視する。）上記の方程式に  $u = u(t) = 0$  を代入すれば、同次システムの解

$$68. \quad \dot{x} = Px \quad x(t+1) = Qx(t)$$

で、初期条件  $x(0) = x^0$  を満たすものは、**基本解**と呼ばれる。したがって、基本解はシステム行列  $P$  或いは  $Q$  と初期状態  $x^0$  にのみ依存するのである。

## 69. 不安定、安定、漸近的安定

同次システム68（そして、これに関連している67も）は、基本解が有界でないならば、**不安定**と呼ばれる。基本解が有界であるならば、システムは**安定**と呼ばれ、安定でかつ基本解が  $t \rightarrow \infty$  の時ゼロに近づくならば、**漸近的安定**と呼ばれる。

## 70. 状態方程式の解

以下では、線型システムの安定条件を検討しよう。そのために、67の2つのシステム（連続型と離散型）の解が、陽関数形で求められるであろう。——これらの解は、本書のいたるところでも使用される。

## 71. 連続時間型状態方程式の解

次のような微分方程式系の解を求める

72.  $\dot{x} = Px + Ru.$

積分因子  $\exp(-Pt)$  を両辺に掛け、<sup>6)</sup> 整理すれば、

$$\exp(-Pt)\dot{x} - P\exp(-Pt)x = \exp(-Pt)Ru.$$

左辺は関数  $\exp(-Pt)x$  の微分となっているので、両辺を 0 から  $t$  まで積分すれば、

$$\exp(-Pt)x(t) \Big|_{t=0}^t = \int_0^t \exp(-P\tau)Ru(\tau)d\tau$$

$$\exp(-Pt)x - x^0 = \int_0^t \exp(-P\tau)Ru(\tau)d\tau,$$

それゆえ、求める解は

73.  $x = \exp(Pt)x^0 + \int_0^t \exp[P(t-\tau)]Ru(\tau)d\tau,$

である。

この公式は、むしろ解の象徴的な表現として考えた方がよく、これ自体では解を計算するためにも、またその分析のためにも不十分である。しかし、次の2点は明らかである。

a) 右辺の第2項として書かれている積分が存在するならば(このための条件は、今検討されない)、任意の初期ベクトル  $x^0$  に対して、システムは唯一の解をもつ。

b) 解は2つの項から成っている。第1項は、初期値  $x(0) = x^0$  としたときの同次方程式  $\dot{x} = Px$  の解(基本解)に対応し、 $u$  に依存しない。第2項は、初期値  $x(0) = 0$  としたときの方程式72の解に対応し、 $x^0$  に依存しない。次に、 $x$  が  $t$  だけでなく  $x^0$  と  $u$  の関数であると考えよう。すると、

$$x = x(t, x^0, u).$$

定義66により、システムの基本解は、

74.  $x_a = x(t, x^0, 0) = \exp(Pt)x^0$

になる。 $P$  は、 $n \times n$  行列で  $n$  個の異なる固有値をもつと考えよう。<sup>7)</sup> それらを  $\lambda_1, \dots$

6) 行列関数  $\exp Z$  は無限級数  

$$\exp Z = E + \frac{Z}{1!} + \frac{Z^2}{2!} + \dots$$
 で定義され、いつでも収束する。

7)  $P$  に対して重複する固有値を許すならば、解はより難しくなってしまうので、このようなケースは論じられない。

$\lambda_n$  で表わし、

$$\Lambda = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$$

をそれらからなる対角行列としよう。すると、周知のように、Pを

$$P = C^{-1} \Lambda C ;$$

という形に表現することができる [訳者補論 5 参照]。収束するべき級数展開可能な P の関数  $\Gamma$  は、すべて次の形に置くことができる。

$$\Gamma(P) = C^{-1} \Gamma(\Lambda) C.$$

それゆえ、関数  $\exp(Pt)$  は、

$$\exp(Pt) = C^{-1} \exp(\Lambda t) C = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} C^{-1} e_i e_i C.$$

という形に書かれる。ここで、

$$D_i = C^{-1} e_i e_i C$$

という記号を導入すれば、結局、

$$75. \quad \exp(Pt) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} D_i.$$

というように表現される。

今度は、公式75の右辺の個々の項  $e^{\lambda_i t} D_i$  について検討しよう。(単純化のため、添字  $i$  は省かれている。) 行列 P に関しては、これ以上仮定をおかないとするならば、 $\lambda$  は、実数かまたは複素数 (或いは純虚数でさえ) の値をとりうることになる。実数の固有値  $\lambda$  に関する項は何の困難もひき起こさないが、複素固有値  $\lambda$  に関する項は、実数値関数  $\exp(Pt)$  が複素数表現として得られていることを示す。これを避けるためには、関数は他の形で表現されねばならない。周知のように、実行列 P の複素固有値は、共役な組で現われ、共役な固有値に対応する共役な固有ベクトルの組が属する。したがって、2つの共役な固有ベクトル

$$\lambda = \delta + i\omega$$

$$\bar{\lambda} = \delta - i\omega$$

に対して、共役な行列

$$D = \frac{1}{2} (\Phi + i\Psi)$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} (\Phi - i\Psi)$$

が対応する。すると、75の右辺のこのような共役な組の項の和は、次のように変形される。

( $e^{i\zeta} = \cos \zeta + i \sin \zeta$  という関係を用いる)

$$\begin{aligned}
 76. \quad e^{i\omega t} D + e^{-i\omega t} \bar{D} &= \frac{1}{2} e^{(\delta+i\omega)t} (\Phi+i\Psi) + \frac{1}{2} e^{(\delta-i\omega)t} (\Phi-i\Psi) \\
 &= \frac{1}{2} e^{\delta t} [(\cos \omega t + i \sin \omega t) (\Phi+i\Psi) + (\cos \omega t - i \sin \omega t) (\Phi-i\Psi)] \\
 &= e^{\delta t} [(\cos \omega t) \Phi + i(\sin \omega t) \Psi]
 \end{aligned}$$

したがって、このような変形を行うことによって、 $\exp(Pt)$ を実数の形で得ることができ、これを74に代入することによって基本解  $x_0$  も得ることができる。一般解を与える公式73の右辺の積分を展開するために、同じ変換を使用することができる。

76の最後の列にある行列の1要素は、はるかに簡単な形で表現することができる。 $\alpha$ を行列 $\Phi$ の任意の要素、 $\beta$ をそれに対応する行列 $\Psi$ の要素とすれば、標準的な三角関数の関係を用いて、

$$77. \quad \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t = r \cos(\omega t + \theta).$$

ここで、 $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  は振動の振幅で、

$$\theta = \arctan\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \text{ は位相角である。}$$

## 78. 個々の(共役な組の)固有値に関する項の分析

いまや、75の和における個々の項、すなわちPのひとつの固有値や共役な複素固有値の組に関係した項が、時間を通じてどのように変動するかを検討することができる。6つのケースを区別しなければならない。

- a) 固有値  $\lambda_i$  が正の実数ならば、 $e^{\lambda_i t}$  は、 $t \rightarrow \infty$  のとき  $+\infty$  へ単調増加する。
- b)  $\lambda_i$  が負の実数ならば、 $e^{\lambda_i t}$  は、 $t \rightarrow \infty$  のとき  $0$  へ単調減少する。
- c)  $\lambda_i = 0$  ならば、すべての  $t$  で  $e^{\lambda_i t} = 1$  となる。これは、定数項を生じさせる。このケースは、システム行列Pが特異であるときのみ現われるが、本書では論じられない。
- d)  $\lambda_i$  と  $\lambda_j$  が、正の実部をもつ共役な複素根であるならば、76において  $\delta > 0$  なので、 $t \rightarrow \infty$  のとき  $e^{\delta t} \rightarrow +\infty$  となる。二番目の要素と考えあわせると、77から明らかなるよう

に、振幅  $re^{\delta t}$  で無限大に発散する周期的振動となる。

e)  $\lambda_i$  と  $\lambda_j$  が、負の実部をもつ共役な複素根であるならば、76において  $\delta < 0$  なので  $t \rightarrow \infty$  のとき  $e^{\delta t} \rightarrow 0$  である。周期的要素を考慮すれば明らかに、 $t \rightarrow \infty$  のとき振幅が 0 に近づく減衰振動となる。

f)  $\lambda_i$  と  $\lambda_j$  が、ゼロの実部をもつ共役な複素根（すなわち純虚数）であるならば、 $\delta = 0$ 、 $e^{\delta t} = 1$  となり、一定の振幅の振動となる [訳者補論 6 参照]。

## 79. 連続的な作動システムの安定規準

上記の分析より、システム行列 P の固有値がすべて異なる場合に対する安定性規準は、すぐに導かれる。

80. システム行列の固有値のうちの少なくとも 1 つが正の実部をもつならば、そのシステムは不安定である。

81. システム行列のすべての固有値が、負の実部をもつならば、システムは漸定的安定である。

82. システム行列のすべての固有値が、非正の実部をもつならば、システムは安定である。したがって、すべての固有値が非正の実部をもち、そのうちのいくつかがゼロであるならば、システムは漸近的安定ではない安定である。

実根に対しては非周期的な項が、複素根に対しては周期的な項が対応している。

上の規準の中で 80 と 81 は、システム行列が重根をもつときでも成り立つ。しかし、純虚数の重根がある場合は、システムは不安定になるのである。

規準 80-81 は、連続的に作動される安定なシステムの固有値は複素平面上の閉じた左半平面の中に位置し、他方漸近安定なシステムの固有値は開いた左半平面に位置するというようにも表現される。

## 83. 離散型の状態方程式の解

84. 差分方程式

$$x(t+1) = Qx(t) + Ru(t)$$

の解を、73と同じような方法で求めよう。

方程式の両辺に  $Q^{-t-1}$  を掛け、移項して、 $\tau = 0$  から  $(t-1)$  までの和をとると、

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} [Q^{\tau-1} x(\tau+1) - Q^{\tau-1} x(\tau)] = \sum_{\tau=0}^{t-1} Q^{\tau-1} Ru(\tau),$$

となる。左辺は2項をのぞいてすべて消去され、

$$Q^{-t} x(t) - x^0 = \sum_{\tau=0}^{t-1} Q^{-\tau-1} Ru(\tau),$$

となる。したがって、最終結果として、

85. 
$$x(t) = Q^t x^0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} Q^{t-\tau-1} Ru(\tau).$$

を得る。

この解に関しては、73の解について述べたと同じことが言える。先と同様に、同次方程式  $x(t+\tau) = Qx(t)$  の解、すなわち基本解

86. 
$$x_a(t) = Q^t X^0.$$

に注意の焦点をあてよう。Pと同じようにして行列Qのスペクトル分解を行えば、次のような形のQを得る。[n個の異なる固有値をもつと仮定(75参照)]

87. 
$$Q^t = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t D_i.$$

$\lambda_i$  を通常の極座標形で書くと、

$$\lambda_i = \delta_i (\cos \omega_i + i \sin \omega_i)$$

ここで、

$\delta_i = |\lambda_i|$  は、固有値  $\lambda_i$  の絶対値で、

$\omega_i = \arctan \frac{\text{Im} \lambda_i}{\text{Re} \lambda_i}$  は、 $\lambda_i$  の偏角である。

ド・モワールの公式を適用して

$$\lambda_i^t = \delta_i^t (\cos \omega_i t + i \sin \omega_i t).$$

1組の共役な複素根に対応する項を加えれば、76に対応する次のような形の実数項をうる。

$$88. \quad \delta^t [ (\cos \omega t)\Phi + (\sin \omega t)\psi ]$$

そして、[ ]の中の要素も  $r \cos(\omega t + \theta)$  の形に書くことができるのである。

### 89. 固有値の分類

78と同じようにして、公式87の個々の固有値や共役な組の固有値に関係した項を分類することができる。

- a)  $\lambda_i$  が実数で、1より大ならば、 $\lambda_i^t \rightarrow +\infty$  となり、単調に増加する。
- b)  $\lambda_i$  が実数で、(-1)より小ならば、 $\lambda_i^t$  は交互に正 ( $t=$ 偶数)、負 ( $t=$ 奇数)の値をとり、その絶対値は単調に増加し、無限大に向かう。
- c)  $\lambda_i$  が実数で、 $-1 < \lambda_i < 1$ ならば、 $\lambda_i^t$  は0に近づく。さらに言うと、 $\lambda_i$  が正ならば、単調に減少し、 $\lambda_i$  が負ならば、符号を正と負に交互にかえながら絶対値は単調減少するのである。(0の固有値に対応する項は、87の和には現われることさえない。)
- d)  $\lambda_i = 1$ ならば、 $\lambda_i^t = 1$ で、定数項となる。
- e)  $\lambda_i = -1$ ならば、 $\lambda_i^t$  は交互に-1と+1をとる。
- f) 88によれば、1組の共役複素根は周期的に振動する項をもたらし、その根の絶対値が1より大ならば振幅は増大し、1より小ならば減衰し、ちょうど1に等しいならば一定(非減衰)である。

### 90. 間欠的に作動されるシステムの安定基準

システム行列Qの固有値がすべて異なるならば、次のような安定基準を得る。

91. システムの行列が1より大きい絶対値の特対値を1つでももてば、不安定である。

92. 行列の特性根のすべての絶対値が1より小さいならば(+1という値の根は含む)、漸近的安定である。

93. 行列の特性根のうち1より大きい絶対値をもつものがひとつもないならば、安定である。1を超える絶対値をもつ根はひとつもないが、ちょうど1に等しい絶対値をもつ根(+1は除く)があるならば、漸近的安定ではない安定である。

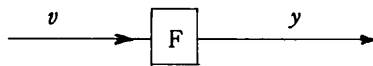
正の実根に対しては、非周期的な項が対応し、負の実根と複素根に対しては、周期的な項が対応する。

したがって、間欠的に作動される安定なシステムの固有値は、複素平面の単位円上とその内部に位置し、他方、漸近的安定なシステムの固有値は、すべてその単位円の内部(おそらくは、点 $1 + i \cdot 0$ を含む)に位置しているのである。

(第3章は、特に本書のために筆者によって書かれた。主題に関連する大部分のことは、制御理論の数学的方法を論じるどの教科書にもみることができる。文献リストに若干の題名をみることができる。)

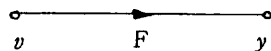
[訳者補論—第3章注解]

[1] ブロック線図とは、第3-2図のように、伝達要素をブロックにし、信号の流れを線で表わしたものであり、入力信号を $v$ 、出力信号を $y$ 、伝達要素を $F$ とすれば、一般的には、



というように表わされる。

他方、信号線図とは、ブロック線図とは反対に、伝達要素を線で、信号を点で表わしたもので、



というように表わされる。

[2] これを数学的に言えば、ある正数 $M$ 、 $a$ が存在し、 $t > T$ なるすべての $t$ に対して、

$$|x(t)| < M e^{at}$$



が成立するということである。

[3] 前章におけるKM-2モデルを例にとって、ラプラス変換を利用して微分方程式を解いてみよう。ここでは、 $q$ について具体的に検討しよう。2-19より、

$$\ddot{q} = \dot{r} - \dot{Y}1 - \dot{Z}$$

2-31より、 $\dot{r} - \dot{Y}1 - \dot{Z} = -2BC\dot{q} + C^2(q^* - q)$ であるから、

$$\ddot{q} = -2BC\dot{q} + C^2(q^* - q)$$

となる。第*i*要素に注目すれば、

$$\ddot{q}_i + 2B_i C_i \dot{q}_i + C_i^2 q_i = C_i^2 q_i^*$$

という2階の微分方程式が得られる。これをラプラス変換し、 $L(q_i) = Q_i(s)$ とおけば、(以下では*i*を省いて計算する。)

$$\{s^2 Q(s) - s \dot{q}^0 - q^0\} + 2BC\{s Q(s) - q^0\} + C^2 Q(s) = C^2 q^* \frac{1}{s}$$

これは、第3-1、2表によれば、容易に導き出される。

これを、 $Q(s)$ についてまとめて、

$$(s^2 + 2BCs + C^2) Q(s) = \frac{C^2 q^*}{s} + s q^0 + \dot{q}^0 + 2BC q^0$$

ここで、

$$\begin{aligned} s^2 + 2BCs + C^2 &= (s + BC)^2 + C^2 - B^2 C^2 \\ &= (s + BC)^2 + D^2 \end{aligned}$$

とおけば、

$$Q(s) = \frac{1}{s} q^* + (q^0 - q^*) \frac{s + BC}{(s + BC)^2 + D^2} + \frac{\dot{q}^0 + BC(q^0 - q^*)}{(s + BC)^2 + D^2}$$

逆変換をとって、

$$q = L^{-1}\{Q(s)\} = q^* L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + (q^0 - q^*) L^{-1}\left\{\frac{s + BC}{(s + BC)^2 + D^2}\right\}$$

$$+ \{\dot{q}^0 + BC(q^0 - q^*)\} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s + BC)^2 + D^2}\right\}$$

第 3-1, 2 表を参考にすれば、

$$q = q^* + (q^0 - q^*) e^{-BCt} \cos Dt + \frac{1}{D} (\dot{q}^0 + BC(q - q^*)) e^{-BCt} \sin Dt$$

なお、第 2 項と第 3 項に  $e^{-BCt}$  が掛けられているのは、性質 4 によっている。ここで、 $\dot{q}^0 = r^0 - Y^0 1 - z^0$  を代入すれば、 $q$  の第  $i$  要素は、次のように解かれる。

$$q_i = q_i^* + e^{-B_i C_i t} \left[ (\cos D_i t) (q_i^0 - q_i^*) + \frac{1}{D_i} (\sin D_i t) \left( r_i^0 - \sum_{j=1}^n Y_{ij}^0 - z_i^0 + B_i C_i (q_i - q_i^*) \right) \right]$$

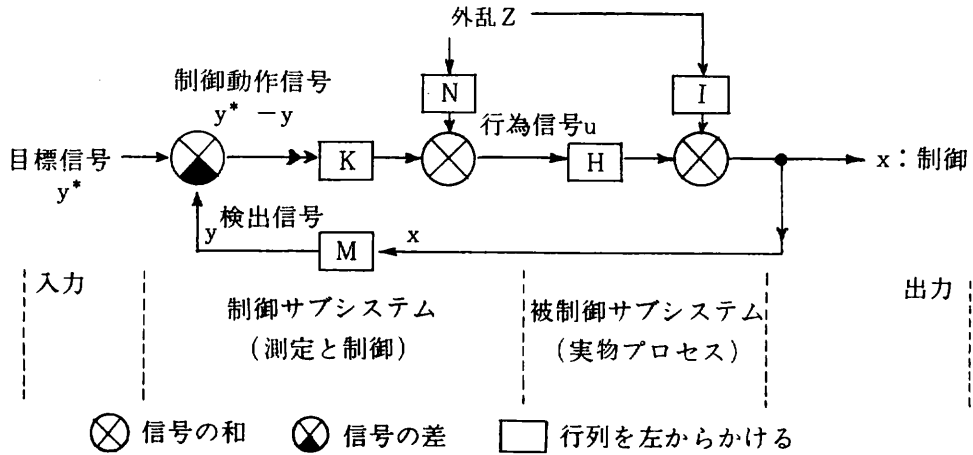
これを行列表示にするには、添字  $i$  をとるだけでよいのだが、記号は次のように定義されることに注意しなければならない。

$$e^{-BCt} = \begin{bmatrix} e^{-B_1 C_1 t} & & & 0 \\ & e^{-B_2 C_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & e^{-B_n C_n t} \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{D_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \frac{1}{D_n} \end{bmatrix}$$

$$\cos Dt = \begin{bmatrix} \cos D_1 t & & & \\ & \cos D_2 t & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \cos D_n t \end{bmatrix}, \quad \sin Dt = \begin{bmatrix} \sin D_1 t & & & \\ & \sin D_2 t & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \sin D_n t \end{bmatrix}$$

$V$  と  $w$  は、これと同様の方法で解くことが出き、 $r$ 、 $Y$ 、 $z$  は、解いた  $q$ 、 $V$ 、 $w$  を 19 に代入して求めることができる。

[4] 第8-1図は、原書195ページにあり、参考までに掲げておこう。



[5] ここで  $C^{-1}$  は、 $P$  の固有ベクトルを横に並べた行列である。

[6] 76における、 $e^{st} [(\cos \omega t)\Phi - (\sin \omega t)\Psi]$  の変動（過渡応答）の形を、固有値の値のとり方に関連させて概略図を書けば、およそ次のとおりになる。

